

3.10 Метод Фурье для трехмерного уравнения Пуассона

Рассмотрим трехмерное уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -f(x, y) \quad (1)$$

Аппроксимируя уравнения (1) получим

$$\begin{aligned} & \frac{P_{i+1jk} - 2P_{ijk} + P_{i-1jk}}{\Delta x^2} + \frac{P_{ij+1k} - 2P_{ijk} + P_{ij-1k}}{\Delta y^2} + \\ & + \frac{P_{ijk+1} - 2P_{ijk} + P_{ijk-1}}{\Delta z^2} = -f_{ijk} \end{aligned} \quad (2)$$

Численное решение задачи ищем в виде рядов Фурье

$$P_{ijk} = \sum_{n=1}^{N-1} a_{nj} \sin \frac{\pi n}{N} \quad (3)$$

$$f_{ijk} = \sum_{n=1}^{N-1} b_{nj} \sin \frac{\pi n}{N} \quad (4)$$

$$a_{nj} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N-1} P_{ijk} \sin \frac{\pi n}{N}$$

$$b_{nj} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f_{ijk} \sin \frac{\pi n}{N}$$

Подставим (3) и (4) в (2) и получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{\Delta x^2} \left[a_{nj} \sin \frac{\pi(i+1)n}{N} - 2a_{nj} \sin \frac{\pi n}{N} + \right. \right. \\
& \left. \left. + a_{nj} \sin \frac{\pi(i-1)n}{N} \right] + \right. \\
& + \frac{1}{\Delta y^2} \left[a_{nj+1k} \sin \frac{\pi n}{N} - 2a_{nj} \sin \frac{\pi n}{N} + a_{nj-1k} \sin \frac{\pi n}{N} \right] + \\
& \left. + \frac{1}{\Delta z^2} \left[a_{nj+1} \sin \frac{\pi n}{N} - 2a_{nj} \sin \frac{\pi n}{N} + a_{nj-1} \sin \frac{\pi n}{N} \right] \right\} = \\
& = \sum_{n=1}^{N-1} b_{nj} \sin \frac{\pi n}{N}
\end{aligned} \quad (5)$$

Используя свойство

$$\sin \frac{\pi(i+1)n}{N} + \sin \frac{\pi(i-1)n}{N} = 2 \sin \frac{\pi n}{N} \cos \frac{\pi n}{N}$$

Можно будет переписать уравнения (5) в таком виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{\Delta x^2} \left[2a_{nj} \sin \frac{\pi n}{N} \cos \frac{\pi n}{N} - 2a_{nj} \sin \frac{\pi n}{N} \right] + \right. \\
& + \frac{1}{\Delta y^2} \left[a_{nj+1k} \sin \frac{\pi n}{N} - 2a_{nj} \sin \frac{\pi n}{N} + a_{nj-1k} \sin \frac{\pi n}{N} \right] + \\
& \left. + \frac{1}{\Delta z^2} \left[a_{nj+1} \sin \frac{\pi n}{N} - 2a_{nj} \sin \frac{\pi n}{N} + a_{nj-1} \sin \frac{\pi n}{N} \right] \right\} = \\
& = \sum_{n=1}^{N-1} b_{nj} \sin \frac{\pi n}{N}
\end{aligned}$$

Перепишем последнее уравнение в таком виде

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N-1} \sin \frac{\pi n}{N} \left\{ \frac{1}{\Delta x^2} \left[2a_{nj} \cos \frac{\pi n}{N} - 2a_{nj} \right] + \right. \\ & + \frac{1}{\Delta y^2} \left[a_{nj+1k} - 2a_{nj} + a_{nj-1k} \right] + \\ & \left. + \frac{1}{\Delta z^2} \left[a_{nj+1} - 2a_{nj} + a_{nj-1} \right] \right\} = \sum_{n=1}^{N-1} b_{nj} \sin \frac{\pi n}{N} \end{aligned}$$

Теперь мы можем сократить на $\sin \frac{\pi n}{N} \neq 0$ и напишем уравнения для $n=1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x^2} \left[2a_{nj} \cos \frac{\pi n}{N} - 2a_{nj} \right] + \frac{1}{\Delta y^2} \left[a_{nj+1k} - 2a_{nj} + a_{nj-1k} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta z^2} \left[a_{nj+1} - 2a_{nj} + a_{nj-1} \right] = b_{nj} \end{aligned}$$

Последнее уравнение приводим в векторный вид

$$A_i a_{i+1} + B_i a_i + C_i a_{i-1} = b_i \quad i = 1, N-1$$

И решаем с помощью матричной прогонки. Где коэффициенты матричной прогонки имеют такой вид

$$A_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \Delta y^2 & & & \\ 0 & \frac{1}{\Delta y^2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta y^2} \end{vmatrix} \quad C_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \Delta y^2 & & & \\ 0 & \frac{1}{\Delta y^2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta y^2} \end{vmatrix}$$

$$B_i = \begin{vmatrix} \frac{2}{\Delta x^2} \cos \frac{\pi}{N} - \frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2} - \frac{2}{\Delta z^2} & \frac{1}{\Delta z^2} & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{1}{\Delta z^2} & \frac{2}{\Delta x^2} \cos \frac{\pi}{N} - \frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2} - \frac{2}{\Delta z^2} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\Delta z^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta z^2} & \frac{2}{\Delta x^2} \cos \frac{\pi}{N} - \frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2} - \frac{2}{\Delta z^2} & \cdot \end{vmatrix}$$

Коэффициенты a_i можно найти с помощью матричной прогонки мы подставляем в (3) и находим численное решение для P_{ijk} .